

Conceptos y procedimientos empleados por estudiantes de física al resolver problemas de proporcionalidad

MAURICIO HÉCTOR CANO PINEDA

INTRODUCCIÓN

El presente documento expone el diseño, implementación y los resultados de un estudio exploratorio, el cual fue parte de una investigación de tesis de la Maestría en Ciencias, con especialidad en Matemática Educativa, del Centro de Investigación y Estudios Avanzados (Cinvestav-IPN). Esta etapa exploratoria consistió en un proceso de investigación diagnóstica, enfocado en conocer las maneras en las que estudiantes de física de primer año resuelven problemas de diferentes contextos involucrando proporcionalidad, así como las dificultades a las que se enfrentan. Se realizó una exploración de los conocimientos que movilizaban y del tipo de procedimientos que empleaban como parte de una estrategia general de resolución de problemas; a partir de los resultados obtenidos, se definieron áreas de dificultad que sirvieron de referente para formular las bases de un par de actividades didácticas con tecnología.

Se inicia con la contextualización y el planteamiento del problema del estudio. Enseguida se efectúa un acercamiento a las nociones de razón y proporción, en la donde la proporcionalidad se define como una igualdad de razones y como una función lineal. Una parte central del estudio fue la revisión de problemas en diversos libros de física y de matemáticas, identificando aquellos que como parte de su solución implican el uso de conceptos y procedimientos asociados a la proporcionalidad. Esta identificación de problemas permitió elegir aquellos que se incluyeron en los instrumentos del estudio. Hacia el final del documento se describe

el diseño e implementación del estudio, así como la organización y análisis de la información obtenida. Los resultados del estudio permitieron identificar *áreas de dificultad* de los sujetos participantes, las cuales permiten puntualizar algunos fenómenos didácticos para su análisis y discusión, en el contexto de la enseñanza de las matemáticas y las ciencias.

CONTEXTO Y

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La formulación del problema de investigación parte de un interés general, que consistía en tratar de conocer cómo es que los estudiantes de física entienden e interpretan una definición o ley en la que se usan expresamente términos, conceptos y nociones asociados a la proporcionalidad. Por ejemplo, había inquietud por saber cómo entendían la *ley de gravitación universal*, presentada por Isaac Newton en su libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicado en 1687, la cual se menciona en los libros de física de la siguiente manera:

Todo objeto en el universo que posea masa ejerce una atracción gravitacional sobre cualquier otro objeto con masa, independientemente de la distancia que los separe. La fuerza que ejerce un objeto dado con masa m_1 sobre otro con masa m_2 es directamente proporcional al producto de las masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa sus centros. Así, la fuerza de atracción gravitacional F_G está dada por $F_G = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$ (Bueche, 1991).

Además de la ley de gravitación universal, otras definiciones y leyes se enuncian explícitamente aludiendo a aspectos relacionados con la proporcionalidad, como la ley de Hooke, ley de Coulomb, ecuación de continuidad, entre otras; no obstante, en los ejemplos y problemas resueltos en los libros de física no se emplean procedimientos que involucren conocimientos asociados a la proporcionalidad.

Consideraremos que un verdadero aprendizaje no puede quedarse en el nivel de memorizar definiciones y leyes de la física, sino que éstas adquieren relevancia cuando se entienden y comprenden los procesos que las originan. A lo largo de la vida escolar de los estudiantes, el aprendizaje de contenidos matemáticos resulta ser demasiado mecánico y poco reflexivo, aprendemos fundamentalmente a ejecutar reglas, propiedades, definiciones y leyes expresadas en fórmulas, sin pasar por el tamiz de la reflexión y del análisis de los conocimientos.

Por lo anterior, este estudio se centró en identificar si el aprendizaje de contenidos de proporcionalidad puede impactar positivamente en el aprendizaje de contenidos de física, que se definen o expresan con lenguaje de proporcionalidad. El supuesto básico del cual partimos es que en la medida en que los estudiantes de física formalicen el aprendizaje de conceptos y propiedades asociados a la proporcionalidad, pueden comprender ciertos contenidos de física. Para investigar esto se consideró necesario identificar y caracterizar aquellas problemáticas que tuviesen los estudiantes al resolver problemas que involucraran a la proporcionalidad; en función de esto se planteó el siguiente objetivo y pregunta de investigación:

El *objetivo* de investigación se centró en conocer y analizar de qué manera los estudiantes de física de primer año, resuelven problemas de física y de matemáticas, que involucran a la proporcionalidad. Así, el estudio exploratorio permitiría conocer el tipo de estrategias empleadas por estos estudiantes al resolver problemas en diferentes contextos y que involucraran a la proporcionalidad.

La *pregunta de investigación* que se formuló fue: ¿cómo resuelven los estudiantes de física de primer año problemas en diferentes contextos que involucran a la proporcionalidad; qué conocimientos previos movilizan y qué procedimientos aplican?

LA PROPORCIONALIDAD EN LA MATEMÁTICA Y EN LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

De manera muy difundida en el ámbito escolar, la proporcionalidad se expresa como una igualdad de razones. En matemáticas una razón es el cociente de dos números o dos cantidades comparables entre sí. Cociente es el resultado de dividir una cantidad por otra, esto es, calcular cuántas veces cabe una en la otra; por tanto, una razón es una comparación entre cantidades de la misma naturaleza.

Para los pares de números de la forma $\frac{m}{n}$ se distinguen cuatro significados o interpretaciones principales: 1) La interpretación de elemento de un sistema matemático, 2) la interpretación de división, 3) la interpretación de fracción o partición; y 4) la interpretación de razón (Peterson, 1999).

Las razones se pueden representar por un cociente o con dos puntos; por ejemplo, si en grupo de 120 personas, 40 son hombres y 80 son mujeres, se dice que la razón del número de hombres en relación con el número de mujeres es de 40 a 80, lo cual se puede escribir $\frac{40}{80}$; o bien, 40 : 80. Así, si la expresión se refiere a la relación que existe entre dos cantidades, expresando el número de veces que una de ellas está contenida en la otra, entonces la expresión es una razón. Definiremos entonces

como *razón* a un número de la forma $\frac{m}{n}$, el cual se lee *m a n* (o bien, *m por n*) y significa que al número *m* le corresponde el número *n* (Copeland, 1984).

Una *proporción* es una relación de dos razones que son equivalentes. La notación $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$ (con *n* y *s* distintos de cero) representa la idea de una proporción; esto es, una proporción está formada por los números *m*, *n*, *r* y *s* si la razón que existe entre *m* y *n* es equivalente a la razón que existe entre *r* y *s*, lo cual se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s}, \text{ o bien, } m:n :: r:s$$

Las expresiones anteriores se leen *m es a n como r es a s*.

La proporcionalidad directa también se define como una función lineal: sean *x* y *y* dos variables cualesquiera. El enunciado *y* varía directamente proporcional con *x*, o *y* es directamente proporcional a *x*, significa que $y = kx$, para algún número real *k* (Swokowski, 1988). La gráfica asociada a una relación de proporcionalidad directa son puntos que pertenecen a una recta que pasa por el origen de coordenadas. Cualquier variación (incremento o decremento) de *x* genera una variación proporcional de *y*; y viceversa.

Por otra parte, la proporcionalidad inversa se define como sigue: sean *x* y *y* dos variables cualesquiera. El enunciado *y* varía inversamente proporcional con *x*, o bien *y* es inversamente proporcional a *x*, significa que $y = \frac{k}{x}$, en donde *k* es un número real (Swokowski, 1988). La gráfica asociada a una relación de proporcionalidad inversa son puntos que pertenecen a una rama de una hipérbola. En ambos casos, el número *k* es la constante de variación o constante de proporcionalidad.

En síntesis, una relación es de *proporcionalidad directa* si en una razón al aumentar una cantidad, la otra también aumenta en la misma proporción. Por el contrario, si en una razón una cantidad aumenta y la otra disminuye en la misma proporción, entonces la relación entre las cantidades es de *proporcionalidad inversa*.

En cuanto a la investigación educativa, los conceptos de razón y proporción han sido ampliamente estudiados con niños y jóvenes. Los primeros reportes de investigación de los que se tienen registros son los de Winch (1913-1914). El pensamiento de Winch estuvo primeramente vinculado con las habilidades para resolver problemas correctamente por parte de estudiantes de escuela elemental (Karplus, Pulos, & Stage, 1983). La noción de razón se ubica en la intersección de dos temas ampliamente estudiados, uno es la proporcionalidad, principalmente desde el punto de vista cognitivo con las investigaciones de Inhelder y Piaget (1955), Noelthing (1981), Karplus (1983); y el otro es el de los números racionales, desde una perspectiva didáctica y con los estudios de Hart, (1988), Kieren (1988), Behr, (1990),

entre otros. Debido a los trabajos de Vergnaud (1988) en torno a las estructuras multiplicativas, hay una tendencia en la que se integra el estudio de estas dos problemáticas (Block, 2005).

(...) se considera que la adquisición de aspectos fundamentales de la noción de número racional se registra en el marco de las relaciones de proporcionalidad, a la vez que la resolución de problemas de proporcionalidad puede requerir, en algunos casos, de la aplicación de herramientas aritméticas, en particular, el cálculo con fracciones y decimales. (Block, 2005, pág. 33).

Por otra parte, para caracterizar el razonamiento de los sujetos, Piaget describió *estadios iniciales* (7-8 años) en los cuales el pensamiento hace uso de correspondencias cualitativas y series, *estadios intermedios u operaciones concretas* (7-8 a 11-12 años) de compensaciones aditivas o el empleo de razones 2: 1, y *estadios avanzados* (11-12 a 14-15 años) o de las operaciones formales en los cuales el razonamiento proporcional es aplicado. En la teoría del modelo de razonamiento de Karplus y otros (1979, 1981, 1983), el razonamiento es una entidad independiente, no conectada integralmente a otros modelos de razonamiento, que se puede aplicar bajo condiciones simples o complejas, en varios niveles.

Lesh (1989) plantea la posibilidad de pensar en el razonamiento proporcional como una estructura unitaria en sí misma. En tanto que para Piaget y sus colaboradores (Inhelder & Piaget, 1958) el *razonamiento proporcional* forma parte de una estructura operacional mayor. A ellos les interesaron las características cualitativas y cuantitativas de las aproximaciones de niños y adolescentes a las actividades que requerían del razonamiento proporcional.

Utilizaron situaciones en las cuales las relaciones funcionales lineales gobernaban la interdependencia de dos o más variables, como en la distancia recorrida por un carro de juguete cuando las ruedas daban una, dos o más revoluciones. El principal objetivo de estas investigaciones consistió en clarificar el desarrollo de los jóvenes con respecto a los conceptos de función, probabilidad, velocidad y efectos de compensación de variables que describen un sistema físico (como la balanza) o un concepto lógico matemático (correlación). Se entiende, entonces, que las actividades hechas para esta investigación no fueron seleccionadas originalmente para ilustrar el razonamiento proporcional (Karplus, Pulos, & Stage, 1983).

Según Lesh y otros (1989), el razonamiento proporcional es un concepto parteaguas. Esto tiene que ver con el hecho de que éste se considera como el nivel más elevado de la aritmética elemental y de los conceptos de número y medida; y se

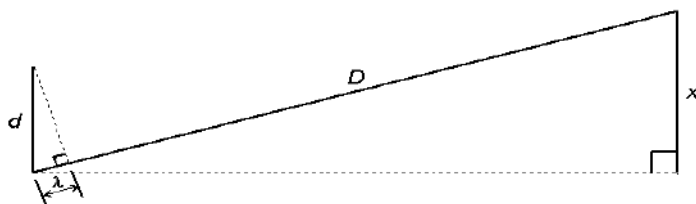
considera como punto de partida del álgebra y otros niveles superiores de las matemáticas. La proporcionalidad ha sido uno de los conceptos matemáticos mayormente difundido en la matemática escolar, debido en buena medida a su carácter intuitivo y de uso relativamente común (Lesh, 1989).

PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD

Paralelamente al proceso de revisión del estado del conocimiento en cuanto a estudios sobre la enseñanza de la proporcionalidad y del razonamiento proporcional, se elaboró una clasificación del tipo de problemas de proporcionalidad, haciendo una revisión minuciosa en libros de física y matemáticas y tomando como base las clasificaciones de Lesh (1989) y Copeland (1984).

A manera de ejemplo, se presenta un problema encontrado en un libro de fundamentos de física. Luego, en el siguiente apartado se describe una versión del mismo problema modificado para el instrumento de pilotaje y la versión del problema que se incluyó en el instrumento final.

Encuentre x en la siguiente figura. $D = 1$ m, $d = 0.1$ mm, $\lambda = 5 \times 10^{-5}$ cm. (Orear, 1997, pág. 39).



Fuente: Elaboración propia.

Al analizar las características del problema, se identificó como un problema de geometría y por tanto de matemáticas, de proporcionalidad directa, de valor faltante e implica la conversión de unidades. Su solución implica el uso de procedimientos asociados a la proporcionalidad, además de conocimientos previos de geometría como propiedades de perpendicularidad y paralelismo, así como de semejanza de triángulos.

Derivado del proceso de revisión bibliográfica e identificación del tipo de problemas asociados a la proporcionalidad, se determinó que todos son *problemas bien estructurados* pues aparecen tanto en la enseñanza como en los libros de texto.

Se caracterizan porque la información (datos y condiciones) para resolverlos se presenta de forma explícita en el enunciado, las reglas para hallar su solución son claras y hay criterios específicos para su resolución (Santos, 2007). En términos generales, la clasificación de problemas de proporcionalidad se conformó por tres categorías principales: 1) el tipo de proporcionalidad, 2) los procedimientos implícitos y 3) el contexto del problema. Para la definición de la categoría *tipo de proporcionalidad* se identificaron tres subcategorías: proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa y proporcionalidad múltiple (combina casos de directa e inversa). Con respecto a la categoría *contexto del problema* se identificaron tres contextos principales que determinaron tres subcategorías: 1) matemáticas (geometría, probabilidad), 2) física y 3) vida cotidiana (mezcla de concentrado de jugo y agua para preparar limonada). La definición de las dos últimas categorías resultó de mucha ayuda para el diseño de los instrumentos del estudio exploratorio.

Por otra parte, para definir la categoría *procedimientos implícitos* fue necesario enlistar y caracterizar los conocimientos que se movilizarían y los procedimientos que se aplicarían como parte de la estrategia de resolución de los diferentes problemas. En suma, los problemas hallados se organizaron en categorías y subcategorías, descritos en la tabla 1.

Tabla 1.
Categorías y subcategorías para
clasificar problemas de proporcionalidad

Categoría	Subcategoría
Tipo de proporcionalidad	Proporcionalidad directa
	Proporcionalidad inversa
	Proporcionalidad múltiple
Procedimientos implícitos	Hallar el valor faltante
	Comparar
	Transformar
	Conversión de unidades
	Mezclas
	Tabulación
	Construcción de la gráfica
Contexto del problema	Interpretación de la gráfica
	Matemáticas
	Física
	Vida cotidiana

Fuente: Elaboración propia.

DISEÑO DEL ESTUDIO EXPLORATORIO

El estudio exploratorio de la investigación consistió de dos momentos: la *fase piloto* y la *fase diagnóstica*. En cada fase se diseñó y aplicó un instrumento elaborado con diferentes problemas, enfocados a explorar conocimientos y procedimientos de proporcionalidad al resolverlos.

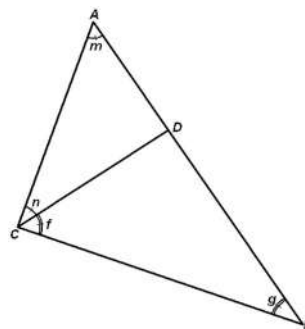
El diseño y aplicación del instrumento de la *fase piloto* tuvo como objetivo poner a prueba un conjunto de problemas seleccionados y modificados para conocer los procedimientos, respuestas y dudas que se generarían con las preguntas planteadas; así como las fallas del instrumento mismo. Un criterio para elegir los problemas es que fueran representativos del conjunto de problemas identificados en los textos revisados y, que barrieran los diferentes contextos, tipos de proporcionalidad y estructuras antes descritos. Otro criterio fue que los problemas se adaptaran al nivel escolar y a los contenidos curriculares que cursarían los sujetos participantes en el estudio: estudiantes del primer año de la carrera de física.

A continuación, se describe uno de los problemas incluidos en el instrumento del pilotaje, cuya modificación principal se aprecia en las preguntas propuestas a fin de obtener información específica para la investigación.

Problema 1. Triángulos semejantes

Considérese un triángulo rectángulo con vértices ABC (el ángulo recto está en C) y cuyos lados tienen las siguientes medidas: $AB = 25$ cm, $BC = 20$ cm y $AC = 15$ cm. Al trazar el segmento CD perpendicular a AB , el triángulo ABC queda dividido en los triángulos ACD y BCD ; tal como se muestra en la siguiente figura:

- ¿Cómo son entre sí los segmentos AC y BC ?
(Sugerencia: verificar cómo son entre sí los ángulos f y m y los ángulos g y n)
- ¿Cómo son entre sí los segmentos AD y CD ?
- ¿Cuánto más grande es el triángulo BCD que el ACD ?
- ¿Cómo son entre sí los dos triángulos?



Fuente: Elaboración propia.

El propósito del problema fue identificar cómo es que los participantes harían la comparación entre los lados de los triángulos; con lo cual se podrían conocer sus nociones en torno al concepto de razón. El enunciado del problema se redactó de manera que se evitara el uso de palabras o términos que hicieran explícito que los triángulos son semejantes. Las medidas de los lados que se han especificado para el

triángulo ABC tienen como característica principal que las longitudes de los segmentos de los triángulos ACD y BCD son números enteros. Al manejar así esta variable didáctica, se pretendió restar un obstáculo en la resolución de la primera parte del problema.

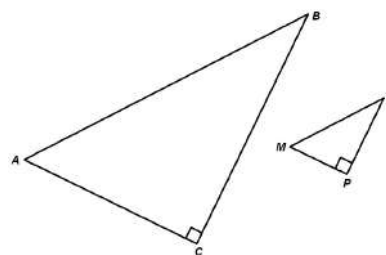
Los resultados obtenidos en la fase piloto sirvieron de elementos de base para el diseño del instrumento de la *fase diagnóstica*. A diferencia del instrumento de pilotaje, en el que se aplicaron siete problemas, en el instrumento exploratorio se aplicaron únicamente seis. Este ajuste permitió disminuir el número de problemas y ampliar el número de ítems, para conocer con mayor precisión las concepciones y nociones de los sujetos en torno a la proporcionalidad. Otro ajuste fue en la redacción de algunos ítems, se afinó su redacción para que el planteamiento pudiese promover en los sujetos la aplicación de estrategias aditivas, las cuales se consideran como estrategias erróneas en la resolución de problemas de proporcionalidad.

Las modificaciones de los ítems de los problemas fueron de dos tipos: en primer término, se afinó el instrumento para que proporcionara información de tipo conceptual y procedimental de los sujetos participantes; lo segundo consistió en replantear los ítems de manera que promovieran en los sujetos la descripción y explicación de sus procedimientos al resolver cada problema. Estos cambios consistieron en la inclusión de las palabras *muestra* o *explica* dentro del enunciado de los ítems. A continuación, se presenta un problema incluido en el instrumento de la fase diagnóstica, al cual se le hicieron modificaciones como resultado del análisis a las respuestas del instrumento del pilotaje.

Problema 1. “Triángulos semejantes”

En la figura se muestran dos triángulos rectángulos ABC y MNP , para los cuales $\angle A = \angle M$ y $\angle B = \angle N$

- Se tiene que AB mide 25 cm y MN mide 10 cm. Si BC mide 5 cm menos que AB , **muestra** cuánto mide NP .
- Muestra** cuántas veces cabe exactamente el segmento MP en el segmento AC .
- ¿Cómo son entre sí los dos triángulos? **Explica** cómo obtienes tu respuesta.



Fuente: Elaboración propia.

La modificación del problema consistió en que los triángulos se muestran separados, a diferencia del mismo problema en la versión de pilotaje, en el cual los triángulos forman parte de una misma construcción. El resto de las modificaciones en la redacción de consignas con las cuales se pretendía identificar con más precisión

los conocimientos y procedimientos que los participantes en el estudio pondrían en acción. El ítem 1.a) se propone como un problema de valor faltante; en sustitución de los ítems 1.a) y 1.b) de la versión anterior, que representaron confusiones en los sujetos al momento de intentar responderlos.

RESULTADOS

DE LA FASE DIAGNÓSTICA

El instrumento de la *fase diagnóstica* se conformó por seis problemas de diferente tipo que implicaría la ejecución de diferentes procedimientos de resolución, lo cual se esperaba observar en las distintas etapas de la resolución de un problema: en el entendimiento del problema, en el diseño del plan de solución (o planteamiento), así como en la implementación de la estrategia de solución y los procedimientos (Santos, 2007).

El instrumento de diagnóstico se aplicó a 22 estudiantes del 2° semestre de la carrera de Física, de la Universidad Veracruzana. La aplicación se realizó en uno de los salones de la facultad. Se les proporcionó el material y se les señalaron las indicaciones para contestarlo. El rango de tiempo de resolución varió de 55 a 80 minutos.

En función de la cantidad de información que se generó –20 ítems respondidos por 22 participantes dieron como resultado 440 respuestas en total–, se efectuó un análisis de corte cualitativo de la información. En un archivo de hoja electrónica de cálculo (Excel) se diseñó una matriz de resultados de doble entrada, vinculando a cada sujeto, dispuestos en columnas, con los ítems de cada problema desplegados en filas. En las celdas correspondientes a la intersección de las variables *sujeto* e *ítem* se describió de forma sintética el tipo de procedimiento empleado. En una columna final se escribieron *observaciones* respecto de los procedimientos y los conocimientos que movilizaron. La tabla 2 es un ejemplo de cómo se vaciaron los resultados obtenidos por los 22 participantes en cada uno de los ítems de los seis problemas.

Tabla 2.
Matriz de doble entrada para organizar
la revisión de los resultados de la fase diagnóstica

Problema 1. Triángulos semejantes		
Sujeto	Procedimiento de resolución por ítem	Observaciones

	ítem 1a)	ítem 1b)	ítem 1c)	
1	Regla de tres	Calcula la razón	Calcula la razón	En el procedimiento del ítem 1a) no muestra los cálculos u operaciones para obtener el resultado.
2	Proporciones	Proporciones / Calcula la razón	Semejanza (criterio AAA)	En los procedimientos respectivos de los ítems 1a), 1b) y 1c) no es claro si aplica álgebra o reglas de las proporciones. No muestra las operaciones.
(...)	(...)	(...)	(...)	(...)

Fuente: Elaboración propia.

Después de evaluar las respuestas de los instrumentos aplicados y registrar los resultados, se diseñó otra matriz de doble entrada con las mismas variables, *sujeto* e *ítem*, para efectuar un análisis fue de corte cuantitativo. A la variable *ítem* se le asignaron como subcategorías los nombres de los *procedimientos* que se identificaron en el análisis cualitativo. Luego, se asignó un 1 en la intersección de las variables *procedimiento* y *sujeto* en los casos en que se identificó la implementación de un determinado procedimiento; o bien, se asignó 0 si no se identificaba algún procedimiento. Al final se contabilizó la frecuencia de uso de cada procedimiento y se calculó el porcentaje con respecto al total de problemas.

Con base en estos datos, se calcularon las frecuencias de ocurrencia de diversas relaciones, como *procedimientos de física – respuesta correcta*, entre otras. La tabla 3 muestra cómo se cuantificaron los distintos procedimientos empleados por los 22 sujetos por ítem y en cada problema.

Un segundo análisis consistió en identificar *áreas de dificultad*. Dicho análisis permitió elaborar una descripción cuantitativa de los resultados por cada ítem, en el cual se introdujeron reflexiones como parte de un análisis cualitativo preliminar. Esta descripción se complementó con una explicación y ejemplos de los procedimientos mayormente empleados por los sujetos evaluados. También se mencionan casos sobresalientes, ya sea porque se trata de resultados diferentes a los comunes; o bien, porque apoyan y refuerzan las reflexiones.

Tabla 3.
Matriz de doble entrada para cuantificar
el tipo de procedimientos utilizados en cada problema.

Problema 1. Triángulos semejantes			
Procedimiento por ítem	Sujeto	Frec.	%

Ítem 1a)		1	2	3	4	...	19	20	21	22		
Procedimiento	Trigonometría	0	0	0	0	...	0	0	0	0	2	9%
	Teorema de Pitágoras	0	0	0	0	...	0	0	0	0	3	14%
	Porcentaje	0	0	0	0	...	0	0	0	0	1	5%
	Regla de tres	1	0	0	0	...	0	0	0	0	2	9%
	Calcula la razón	0	0	0	0	...	0	0	0	0	1	5%
	Plantea proporciones	0	1	1	1	...	1	1	0	1	12	55%
Respuesta	Respuesta correcta	1	1	0	1	...	1	1	1	1	20	91%
	Respuesta incorrecta	0	0	1	0	...	0	0	0	0	2	9%
	No es clara la respuesta	0	0	1	0	...	0	0	0	0	1	5%
	No responde	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0	0%
Relaciones	matemáticas-correcta	0	0	0	0	...	0	0	0	0	4	18%
	matemáticas-incorrecta	0	0	0	0	...	0	0	0	0	1	5%
	proporcionalidad-correcta	1	1	0	1	...	1	1	0	1	15	68%
	proporcionalidad-incorrecta	0	0	1	0	...	0	0	0	0	1	5%

Fuente: Elaboración propia.

ANÁLISIS

DE RESULTADOS Y REFLEXIONES

El análisis de los resultados retomó las características referidas a los *conocimientos o recursos*. Cada situación se analizó si fue incorrecta (área de dificultad) en términos de las siguientes categorías: *recursos débiles, errores consistentes, procedimientos incorrectos, concepciones erróneas o incompletas, procedimientos informales*, entre otras; mismas que se detectaron con cierta regularidad en las resoluciones y respuestas de los estudiantes participantes en el estudio.

En la resolución de los problemas de física, se observa que los *recursos* con los cuales los estudiantes *entraron* o abordaron este tipo de problemas, regularmente son hechos y definiciones propios del campo. Se observó que predomina el uso de procedimientos que convencionalmente se desarrollan para esos casos, en vez de usar procedimientos asociados a la proporcionalidad con los cuales también los hubiesen resuelto, incluso de forma más directa. A partir de esto, podemos afirmar que hubo un *uso persistente de hechos y definiciones de física* por parte de los participantes, así como un *uso persistente de procedimientos rutinarios de física*. En los resultados se detectaron dificultades para resolver correctamente los problemas de contexto de física, aún y cuando los participantes aplicaron hechos y definiciones del campo y emplearon procedimientos rutinarios. Esto fue un indicador de que los

participantes mostraron *recursos débiles de física con errores consistentes en procedimientos rutinarios de física*.

Todo aquello que los estudiantes conocen y saben hacer es determinante en la elección de la estrategia de resolución de problemas, debido a que emplearon fórmulas y ecuaciones como la ecuación de velocidad constante o la ecuación de energía cinética, usaron notación vectorial, tabularon datos para construir gráficas, entre otros. Esto hace suponer que hay un *uso predominante de conocimientos acerca del discurso de la física* por parte de los participantes. Además, se observó el uso de estos recursos sin mostrar un entendimiento profundo ni reflexión sobre el problema por resolver, pues la mayoría obtiene respuestas incorrectas.

Otro aspecto donde se reconoció el uso predominante de conocimientos acerca del discurso de la física, fue el uso limitado de conocimientos y procedimientos asociados a la proporcionalidad. Los resultados evidenciaron que los participantes no reconocieron que en los problemas había elementos suficientes para identificar la situación como de proporcionalidad y, por tanto, resolverla con nociones y procedimientos asociados a la proporcionalidad.

Ahora bien, los casos donde los estudiantes emplearon conceptos y procedimientos de proporcionalidad, se observa que hay un *uso rudimentario e intuitivo* de éstos. Los conceptos y procedimientos de proporcionalidad son usados como herramientas dentro de procedimientos rutinarios específicos; esto es, no integran una estrategia general de resolución. Esto parece indicar que los conceptos y procedimientos de proporcionalidad se encuentran en un segundo plano, detrás de los conocimientos y procedimientos específicos de física o de matemáticas aprendidos durante la instrucción escolar, los cuales son usados de manera convencional en la resolución de problemas de este tipo. Dicho lo anterior, podemos afirmar que los estudiantes tienen conocimientos o *recursos débiles de proporcionalidad* y tienen *errores consistentes en procedimientos rutinarios de proporcionalidad*.

CONSIDERACIONES FINALES

Dado el énfasis en el uso de conocimientos del dominio y procedimientos rutinarios por parte de los estudiantes, podemos pensar que esto se origina en los procesos de enseñanza que se dan en la facultad de física (y muy posiblemente los que se dieron en el bachillerato). Al parecer, el modelo de docencia y las prácticas con las que instruyen a los estudiantes impacta fuertemente en la forma en que éstos aprenden a resolver los problemas correspondientes a un tema o contenido, limitándose a solo emplear los recursos permitidos o validados dentro del dominio de conocimientos donde se ubican los problemas.

Una problemática educativa que se observa en estos casos está identificada en la forma en cómo los estudiantes resuelven los problemas, al parecer se genera una especie de condicionamiento que inhibe la puesta en acción de procedimientos alternos y más ricos en recursos. Con base en lo anterior, podemos suponer que los procesos de enseñanza en la educación superior generan que los estudiantes adquieran un *aprendizaje parcial* de los contenidos. Los resultados de esta investigación develaron que varios estudiantes no habían comprendido contenidos como movimiento uniforme y segunda condición de equilibrio, los cuales son conocimientos básicos en su formación. Esto no solo se observó en los resultados erróneos que obtuvieron, sino en el proceso de *entrada y abordaje* de los problemas.

Es posible que el bajo desempeño de los estudiantes al resolver problemas se vea influenciado por el tipo de libros de los que disponen. De forma generalizada, el contenido de los libros de física revisados está organizado en capítulos temáticos, cada capítulo temático se desglosa en subcapítulos o apartados que inician con los conceptos más básicos del tema y gradualmente se avanza hacia otros más complejos. El conocimiento es acumulativo, de tal forma que en cada tema los conocimientos se van montando o definiendo a partir de otros. Además, se plantean y desarrollan ejemplos como casos en donde se aplican los conceptos explicados; o bien, se refuerzan las definiciones, leyes, principios y teoremas a los que se llega. Casi nunca se usan los ejemplos como detonantes de la reflexión y la construcción conceptual.

La estructura de los libros descrita promueve hábitos de estudio y de aprendizaje limitados, los cuales consisten básicamente en la reproducción de procedimientos de resolución de una colección de problemas, sin que medie una reflexión profunda de los conceptos. El aprendizaje se restringe a una especie de entrenamiento en la resolución de problemas, sin pasar por la reflexión, maduración, comprensión y adquisición de conceptos.

Con base en el análisis previo en los resultados obtenidos es posible plantear algunas consideraciones enfocadas a la enseñanza de las matemáticas y de la física. En primer término, es necesario que los estudiantes logren articular los conocimientos y procedimientos que forman parte de los contenidos de las diferentes asignaturas que cursan, ya que se aprecia un aprendizaje fragmentado y encapsulado de contenidos que no detona en una construcción conceptual más profunda.

Se considera que los estudiantes requieren en su formación enriquecer y ampliar sus estrategias para la resolución de problemas. Lo visto es que sus estrategias son limitadas, muy lineales y rígidas, con aplicación de procedimientos mayormente algorítmicos. Esta condición puede reducirse con la implementación de procesos de enseñanza que propicien el uso de herramientas y recursos diversos y de diferente naturaleza.

Dicho esto, se considera que el aprendizaje de contenidos de física se puede enriquecer en la medida que los estudiantes desarrollen estrategias de resolución de problemas que involucren el uso de conceptos y de técnicas como *herramientas para el aprendizaje*. Los conocimientos y procedimientos aprendidos en las diversas asignaturas deben servirles para la construcción de otros; y esto se puede lograr en la medida que se impulse la puesta en acción de estrategias heurísticas.

REFERENCIAS

- Blatt, F. (1991). *Fundamentos de Física* (3ª ed). México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Block, D. (2005). Notas sobre el papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria. En S. d. Pública, *Antología. Primer Taller de Actualización sobre los programas de estudio 2006. Reforma de la Educación Secundaria*. México, D.F.: SEP.
- Bueche, J. F. (1991). *Física General*. México: McGraw-Hill.
- Copeland, R. (1984). *Cómo aprenden matemáticas los niños*. USA: MacMillan Pub. Co. & Collier MacMillan Pub.
- Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). 3. Proportional reasoning of early adolescents. En R. & Lesh, *Acquisition of mathematics concepts and processes*. USA: Academic Press.
- Lesh, R. (1989). Proportional Reasoning. En J. Hiebert, & M. Berh, *Number concepts and operations in the middle grades* (93–118) (págs. 93-118). USA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Orear, J. (1997). *Física Fundamental* (2ª ed.). México: Limusa.
- Peterson, J. (1999). *Teoría de la Aritmética*. México: Limusa-Wiley S. A.
- Santos, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos Cognitivos*. México: Trillas.
- Swokowski, E. W. (1988). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.